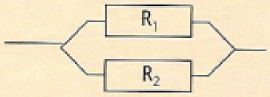
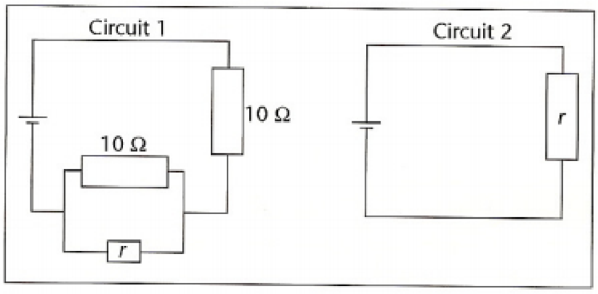
TD φ 0 : Compléments mathématiques, analyse dimensionnelle et homogénéité

Exercice 1 : Notion de résistance équivalente

Rappel

En série	En parallèle
	
Résistance équivalente R telle que $R = R_1 + R_2$.	Résistance équivalente R telle que $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Les circuits ci-dessous comportent des conducteurs ohmiques de résistances 10 ohms et *r* ohms.



a) Déterminer *r* pour que les deux circuits soient équivalents (on arrondira au dixième).
b) Déterminer *r* pour que la résistance équivalente au circuit 1 soit supérieure à celle du circuit 2.

Exercice 2 : Calcul de dérivées utiles en Physique

1. Exprimer la dérivée du produit $\cos(\omega t) \times \sin(\omega t)$ par rapport au temps.
2. Exprimer la dérivée de l'énergie cinétique $E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$ par rapport au temps et exprimer le résultat en fonction de la masse et de dérivées de la position $x(t)$.
3. Exprimer la dérivée de l'énergie potentielle élastique $E_{p,él} = \frac{1}{2}k(x(t) - l_0)^2$ par rapport au temps ; $x(t)$ représentant la position et l_0 étant une constante positive.

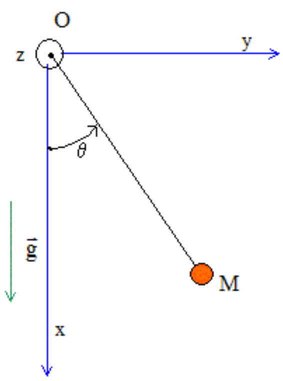
Exercice 3 : calcul d'intégrales

Calculer les intégrales ci-dessous :

1. $$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt} \text{ avec } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ et } \omega \text{ un réel positif}$$
2. $$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt} \text{ avec } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ et } \omega \text{ un réel positif}$$
3. $$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}dt} \text{ avec } \alpha > 0$$

Exercice 4 : Pendule simple

Un objet ponctuel M de masse m est suspendu à l'extrémité d'un fil OM de masse négligeable et de longueur L. Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy), autour de l'axe horizontal (Oz).
La position de l'objet M est repérée par l'angle θ que fait le fil avec la verticale.
L'ensemble ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g\vec{e}_x$.



On admet que l'énergie potentielle du point M s'écrit ici :

$$\boxed{E_P(\theta) = mgL(1 - \cos(\theta))}$$

On admet que les positions d'équilibres sont données par les **extréma de l'énergie potentielle**.

On distingue alors deux cas :

— une position d'équilibre est **stable** si c'est un **minimum** de l'énergie potentielle.

— une position d'équilibre est **instable** si c'est un **maximum** de l'énergie potentielle.

1. Quelle équation doit-on résoudre pour trouver la ou les positions d'équilibre du point M ?
2. Déterminer la ou les positions d'équilibre du point M. Représenter la situation physique dans chacun des cas.
3. Quelles sont la ou les positions d'équilibre stable ?
4. Quelles sont la ou les positions d'équilibre instable ?

Exercice 5 : Dimensions

1. Donner la dimension d'une force en fonction des dimensions de base.
2. En déduire la dimension d'une pression en fonction des dimensions de base.

Exercice 6 : Unité du système international

Simplifier l'unité suivante du système international : $\frac{J.N}{W.kg}$

Exercice 7 : Période de rotation d'un satellite

La période de rotation d'un satellite de masse m tournant autour de la Terre (de masse M) est une fonction de G (constante gravitationnelle), de la masse M et du rayon de la trajectoire a.

1. En exprimant G en fonction de quantités physiques connues, donner la dimension de G en fonction des dimensions de base.

2. La période de rotation du satellite s'écrit : $T = C_{ste} a^\alpha M^\beta G^\gamma$. Trouver les valeurs de α, β et γ.

3. Par une méthode similaire, trouver l'expression du rayon de la trajectoire du satellite en fonction de G, M et V_0 (vitesse du satellite).

Exercice 8 : Constante de structure fine

1. Rappeler la relation entre l'énergie cinétique d'un point matériel en translation, sa masse m et sa vitesse v.

2. En déduire la dimension de l'énergie en fonction des dimensions de base.

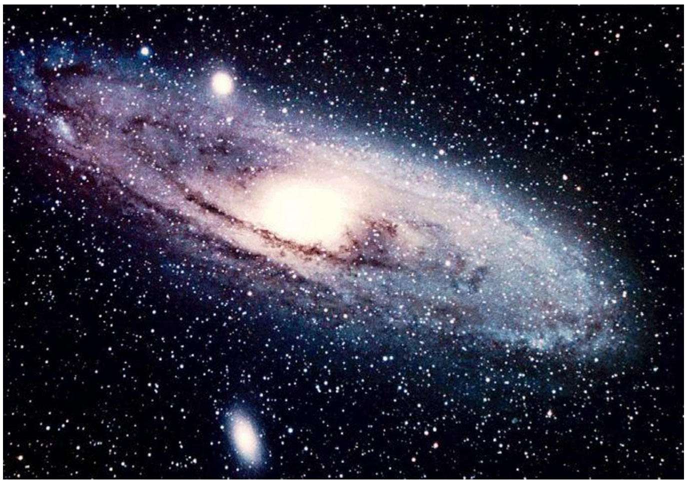
3. La permittivité diélectrique du vide vaut : $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} F/m$. Exprimer ϵ_0 dans les unités du système international sachant que la norme de la force coulombienne entre deux particules chargées de charge respective q_1 et q_2 distantes de r s'écrit :

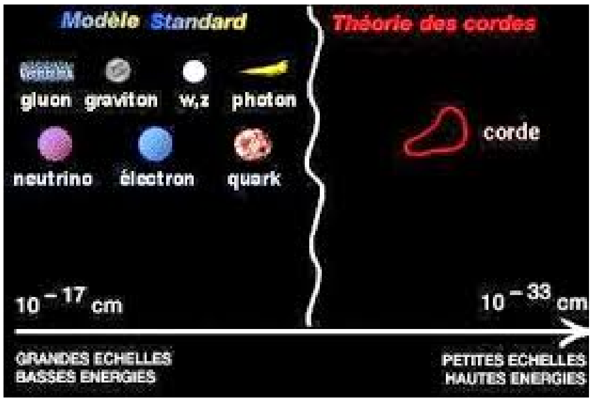
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

4. Quelle constante peut-on écrire à partir des grandeurs : e (charge électrique élémentaire), h (constante de Planck), c (célérité de la lumière dans le vide) et ϵ_0 sachant que l'on souhaite que l'exposant associé à ϵ_0 soit -1.

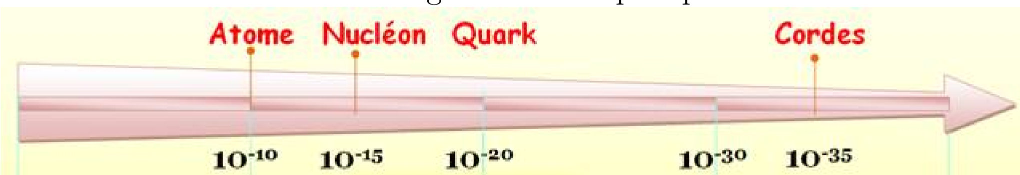
5. La constante de structure fine, notée α, intervient dans l'étude de l'interaction faible. Sachant que cette constante est égale à la constante de la question précédente à laquelle on rajoute un facteur multiplicatif $\frac{1}{2}$, calculer la valeur numérique de $\frac{1}{\alpha}$.

Exercice 9 : Grandeurs de Planck





Les dimensions de Planck sont les grandeurs les plus petites concevables de l'Univers.



Il n'est pas possible de faire une mesure de temps inféreure au chronon (temps de Planck). En dessous, les évènements sont considérés comme simultanés.
De même, il n'est pas possible de faire une mesure de longueur plus petite que la longueur de Planck. En dessous, toute mesure est sans signification. Pour des valeurs inférieures, l'espace devient une mousse quantique.
D'une petitesse extrême, la constante de Planck représente la plus petite quantité d'énergie existant dans le monde physique : c'est la plus petite action mécanique concevable.
En combinant les trois constantes G (constante universelle de gravitation), c (célérité de la lumière) et $\hbar$ (constante de Planck h divisée par 2π), on obtient les grandeurs suivantes :

$$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}, \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \text{ et } \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

1. Donner les dimensions de $\hbar$, G et c en fonction des dimensions de base.
2. Déterminer quelle grandeur est homogène à :
   - une longueur, appelée longueur de Planck et notée l_P.
   - une masse, appelée masse de Planck et notée m_P.
   - une durée, appelée temps de Planck et notée τ_P.
3. Calculer τ_P, l_P et m_p.
   Indication : $G = 6.67 \times 10^{-11}$ SI, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ et $h = 6.63 \times 10^{-34}$ SI.
4. On introduit également la température de Planck notée T_P à partir des constantes c, k_B et m_P. Déterminer l'expression de T_P.
   Indication : La constante de Boltzmann k_B est homogène au rapport d'une énergie sur une température et on a : $k_B = 1.38 \times 10^{-23} J.K^{-1}$.
5. Calculer numériquement la température de Planck T_P.